BANAX FƏZASINDA MÜCƏRRƏD BİHARMONİK TƏNLİK ÜÇÜN DİRİXLE MƏSƏLƏSİ

H.D. ORUCOV, Q.L.ŞİRƏLİYEVA

Qafqaz Universiteti
Bakı / AZƏRBAYCAN

XÜLASƏ

Məqalədə Banax fəzasında mücərrəd biharmonik tənlik üçün yarımoxda Dirixle məsələsinin həlli yazılmış və bu həllə yığılan çoxhədlilər ardıcıllığı qurulmuşdur.

Açar sözlər: yarımqrup, tam vektorlar, analitik vektorlar, infinitezimal operator

THE DIRIHLET PROBLEM FOR THE ABSTRACT BIHARMONIC EQUATION IN BANACH SPACE

ABSTRACT

In the given work there has been obtained the solution of Dirichlet problem on a semi axis for the abstract biharmonic equation in Banach space and was formed sequence of polynomials which converges to the solution.

Key words: semigroup, complete vector, analytic vector, infinitesimal operator

Tutaq ki, A_1, A_2, A_3, A_4 operatorları $\|\cdot\|$-normasına görə X banax fəzasında verilmiş xətti operatorlardır.

$$D = \bigcap \left\{ D(A_{i_1} A_{i_2} A_{i_3} A_{i_4}) : i_j \in (1,2,3,4) \right\}$$

işarə edək.

Aşağıdakı tənliyə baxaq:

$$\prod_{i=1}^{4} (\frac{d}{dt} - A_i)u = \qquad (1^{/})$$

$$= (\frac{d}{dt} - A_4)(\frac{d}{dt} - A_3)(\frac{d}{dt} - A_2)(\frac{d}{dt} - A_1)u = f(t)$$

$(1')$ tənliyinin həlli aşağıdakı şərtləri ödəyən $u(t, f) = u(t)$ vektor-funksiyasına deyilir [1]:

1. $\prod_{j=1}^{k} (\frac{d}{dt} - A_j) u \in C\left[R_+, D(A_{k+1}) \bigcap C^1(R_+, X)\right]$,

   $k = 0,1,2,3.$

   $(\prod_{j=1}^{0} (\frac{d}{dt} - A_j) u = u$ işarə edilmişdir)

2. $u(t)$ vektor-funksiyası $R_+ = [0, \infty))$ aralığında (1) tənliyini ödəyir.

Xüsusi halda $A_1 = A_2 = A_3 = A_4 = A$ olduqda $(1')$ tənliyi mücərrəd biharmonik tənliyə çevrilir:

$$u^{(4)} + \quad 2A^2 u'' + A^4 u = f(t)$$

Yarımoxda mücərrəd biharmonik tənlik üçün Dirixle məsələsi (1) tənliyinin

$$u(0) = \varphi_0, u'(0) = \varphi_1, \quad \varphi_0, \varphi_1 \in X \qquad (2)$$

şərtlərini ödəyən $u(t)$ həllinin tapılmasına deyilir.

İşdə (1)-(2) məsələsinin həlinin A-operatorundan asılı çoxhədlilərlə yaxınlaşdırılması məsələsi öyrənilmişdir.

X fəzasında verilmiş güclü kəsilməz $T(t)$, $(-\infty < t < \infty)$ qrupunun infinitezimal operatorunu A ilə işarə edək. Biz hesab edəcəyik ki, sıfır A operatoru üçün requlyar nöqtədir. Məlumdur [1] ki, $T(t)$ güclü kəsilməz qrup olduqda elə M sabiti və $\omega > 0$ ədədi var ki, $\forall x \in X$ üçün

$$\|T(t)x\| \le Me^{\omega|t|}\|x\| \tag{3}$$

və

$$\frac{d^k}{dt^k}T(t)x = A^kT(t)x = T(t)A^kx\ ,$$

$$x \in D(A^k).$$

$$C^\infty(A) = \left\{ f \mid f \in \bigcap_{k\ge1} D(A^k) \right\}$$

ilə A operatorunun sonsuz diferensiallanan vektorları çoxluğunu işarə edək .

Aşağıdakı çoxluqları təyin edək:

$$C_{\{m_k\}}(A) =$$
$$= \left\{ f \in C^\infty(A) \mid \exists\alpha > 0, \exists c > 0 : \|A^k f\| \le c\alpha^k m_k \right\}$$

$$C_{(m_k)}(A) =$$
$$\left\{ f \in C^\infty(A) \mid \forall\alpha > 0, \exists c > 0 : \|A^k f\| \le c\alpha^k m_k \right\}$$

burada, $\{m_k\}_{k=1}^\infty$ azalmayan müsbət ədədlər ardıcıllığıdır belə ki,

$$\exists c > 0, h > 0 : m_{k+1} \le ch^k m_k\ .$$

Qeyd edək ki, $m_k = k!$ olduqda $C_{\{m_k\}}(A)$ və $C_{(m_k)}(A)$ çoxluqları uyğun olara A operatorunun tam və anlitik vektorları çoxluğu adlandırılır. $C_{\{1\}}(A)$ -ya eksponensial tip vektorlar çoxluğu $C_{\{n!^\beta\}}(A), (C_{(n!^\beta)}(A))$ çoxluqlarına isə β tərtibli Rumye (Berlinq) tipli Jevre sinifi deyilir [2].

$$u(t) = (U(t) - T(t) + 2tAT(t))g_0 + t(U(t) -$$
$$- T(t))g_1 + (T(t) - tAT(t))\varphi_0 + tT(t)\varphi_1 +$$
$$+ \frac{1}{4}\int_0^t \left[(T(s-t) - U(s-t))A^{-3} + \right. \tag{4}$$
$$\left. + ((t-s)T(s-t) - (s-t)U(s-t))A^{-2} \right] f(s)ds$$

işarə edək, burada $U(t)$ infinitezimal operatoru $-A$ olan və sıfır nöqtəsində güclü kəsilməz yarımqrupdur, $f(s) \in C(R_+, X), f(s)$ -in aldığı qiymətlər $D(A^2)$ çoxluğuna daxildir və

$$A^2 f \in C(R_+, X)\,,$$

$$g_0 \in D(A^5), g_1 \in D(A^4), \varphi_0, \varphi_1 \in D(A^4).$$

Göstərək ki, $u(t)$ vektor-funksiyası (1)-(2) məsələsinin həllidir.

Qrupun (3) xassələrindən istifadə etməklə $u(t)$ vektor-funksiyasının dörd tərtibdən törəmələrini tapıb, onlari (1) tənliyində yerinə yazsaq, bu funksiyanin tənliyin həlli olduğunu görərik. (2) şərtlərinin ödəndiyini yoxlamaq üçün qeyd edək ki,

$$(U(t) - T(t) + 2tAT(t))g_0 + t(U(t) - T(t))g_1$$

vektor-funksiyası (2) tənliyinin $f(s) = 0$ olduqda bircins sərhəd şərtləri daxilində, yəni $\varphi_0 = 0,\ \varphi_1 = 0$ olduqda həllidir. (4) düsturundakı qalan ifadə isə (2) tənliyinin qeyri bircins sərhəd şərtləri daxilində həllidir. Ona görə də, (4) vektor-funksiyası (1)-(2) məsələsinin həllidir.

Məlumdur [3] ki, infinitezimal operatoru A olan və sıfır nöqtəsində güclü kəsilməz $T(t)$ yarımqrupu üçün aşağıdakı Teylor düsturu doğrudur:

$$T(t)x = \sum_{k=0}^{n-1}\frac{(tA)^k}{k!}x + \frac{1}{(n-1)!}\int_0^t (t-\xi)^{n-1}T(\xi)A^n x d\xi\ , \quad x \in D(A^n) \tag{5}$$

$U(t)$ ilə infinitezimal operatoru $-A$ olan və sıfır nöqtəsində güclü kəsilməz yarımqrupu işarə edək. Onda (5) düsturuna analoji olan aşağıdakı düsturu da yaza bilərik:

$$U(t)x=\sum_{k=0}^{n-1}\frac{(-tA)^k}{k!}x+ \qquad (6) \qquad , \ x\in D(A^n)$$
$$+\frac{1}{(n-1)!}\int_0^t (t-\xi)^{n-1}U(\xi)(-A)^n x d\xi$$

(5) və (6)-dan alırıq ki,

$$(U(t)-T(t)+2tAT(t))g_0=$$
$$=\sum_{k=o}^{n-1}((-1)^k E-E+2tA)\frac{(tA)^k}{k!}g_0+$$
$$+\frac{1}{(n-1)!}\int_0^t (t-\xi)^{n-1}((-1)^n U(\xi)-T(\xi)+ \qquad (7)$$
$$+2tAT(\xi))A^n g_0 d\xi$$

$$u_1(t)=(U(t)-T(t)+2tAT(t))g_0 \qquad ,$$
$$u_n^1(t)=\sum_{k=0}^{n-1}((-1)E-E+2tA)\frac{(-tA)^k}{k!}g_0$$

işarə edək.

Lemma 1. $T(t)$ müntəzəm məhdud $(\omega=0)$ qrup, $Ag_0\in C_{\{m_n\}}(A)\ \left(C_{(m_n)}(A)\right)$ olarsa, onda $\exists\, C>0,\ \rho=\rho(t)>0$ ($\forall\rho>0$ üçün, $\exists C>0)$) ədədləri var ki, $\forall t\geq 0$ üçün aşağıdakı bərabərsizlik doğrudur:

$$\left\|u^1(t)-u_n^1(t)\right\|\leq C(1+t)\rho^n\frac{m_n}{n!},\ \rho=\alpha t \quad (8)$$

İsbatı. Lemmanı $g_0\in C_{\{m_n\}}(A)$ üçün isbat edəcəyik, $g_0\in C_{(m_n)}(A)$ halı üçün analoji qaydada isbat edilir.

Tutaq ki, $g_0\in C_{\{m_n\}}(A)$. Onda, $\|T(t)\|\leq M$ olduğu üçün (4) və (5) düsturlarından istifadə etsək aşağıdakı münasibətləri yaza bilərik:

$$\left\|u^1(t)-u_n^1(t)\right\|=\left\|\frac{1)}{(n-1)!}\int_0^{ts}(t-\xi)^{n-1}((-1)^k U(\xi)-\right.$$
$$\left.T(\xi)+2tT(\xi))A^n g_0 d\xi\right\|\leq$$
$$\leq\frac{1}{(n-1)!}\int_0^t (t-\xi)^{n-1}\left\|(-1)^k U(\xi)A^n g_0-\right.$$
$$\left.-T(\xi)A^n g_0+2tT(\xi)A^{n+1}g_0\right\|d\xi\leq$$
$$\leq\frac{2M}{(n-1)!}\int_0^t (t-\xi)^{n-1}(\left\|A^n g_0\right\|+t\left\|A^{n+1}g_0\right\|)d\xi\leq$$
$$\leq\frac{2M}{(n-1)!}\int_0^t (t-\xi)^{n-1})(c\alpha^n m_n+tc\alpha^n m_{n+1})\leq$$
$$\leq\frac{2Mc\alpha^n(1+\alpha)m_{n+1}(1+t)t^n}{n!}=$$
$$=C(1+t)\rho^n\frac{m_{n+1}}{n!}.$$

Bununla lemma isbat olundu.

Aşağıdakı işarələmələri qəbul edək:

$$u^2(t)=t(U(t)-T(t))g_1 \qquad ,$$
$$u_n^2(t)=t\sum_{k=0}^{n-1}((-1)^n-1)\frac{(tA)^n}{n!}g_1 \qquad ,$$
$$g_1\in C_{\{m_n\}}(A)\ \left(C_{(m_n)}(A)\right),$$
$$u^3(t)=(E-tA)T(t)\varphi_0,$$
$$u_n^3(t)=(E-tA)\sum_{k=0}^{n-1}\frac{(tA)^n}{n!}\varphi_0 \qquad ,$$
$$A\varphi_0\ \in C_{\{m_n\}}(A)\ \left(C_{(m_n)}(A)\right),$$
$$u^4(t)=tT(t)\varphi_1,$$
$$u_n^4(t)=t\sum_{k=0}^{n-1}\frac{(tA)^n}{n!}\varphi_1 \qquad ,$$
$$\varphi_1\ \in C_{\{m_n\}}(A)\ \left(C_{(m_n)}(A)\right),$$

Onda lemma1-ə analoji olaraq aşağıdakı bərabərsizliklərin də doğru olduğunu göstərmək olar:

$$\left\|u^2(t)-u_n^2(t)\right\|\leq Ct\rho^n\frac{m_n}{n!}, \qquad (9)$$
$$\left\|u^3(t)-u_n^3(t)\right\|\leq C(1+\alpha t)\rho^n\frac{m_n}{n!}, \qquad (10)$$
$$\left\|u^4(t)-u_n^4(t)\right\|\leq Ct\rho^n\frac{m_n}{n!}. \qquad (11)$$

Tutaq ki,

$$u^0(t)=\frac{1}{4}\int_0^t\left[(T(s-t)-U(s-t))A^{-3}+\right.$$
$$\left.+((t-s)T(s-t)-(s-t)U(s-t))A^{-2}\right]f(s)ds$$

$$u_n^0(t) = \frac{1}{4}\sum_{k=0}^{n-1}\int_0^t \frac{(s-t)^k}{k!}\Big[(A^{k-3} + (-1)^k A^{k-3}) +$$
$$((t-s)A^{k-2} + (-1)^{k-2}(s-t)A^{k-2})\Big] f(s)ds$$

işarə edək.

Lemma 2. $T(t)$ müntəzəm məhdud ($\omega = 0$) qrup, $A^{-3}f(s), A^{-2}f(s) \in C(R_+, C_{\{m_n\}}(A))$, $(A^{-3}f(s), A^{-2}f(s) \in (C(R_+, C_{(m_k)}(A))$ olarsa, $\exists\ C > 0, \rho = \rho(t) > 0$ ($\forall \rho > 0$ üçün, $\exists C > 0)$) ədədləri var ki, $\forall t \geq 0$ üçün aşağıdakı bərabərsizlik doğrudur:

$$\left\| u^0(t) - u_n^0(t) \right\| \leq C(t + t^2)\rho^n \frac{m_n}{(n+1)!} \qquad (12)$$

Bu bərabərsizlik Lemma 1-ə analoji qaydada isbat edilir.

$$u_n(t) = u_n^1(t) + u_n^2(t) + u_n^3(t) + u_n^4(t) + u_n^0(t)$$

işarə edək.

Teorem. Əgər A müntəzəm məhdud $T(t)$ qrupunun infinitezimal operatorudursa və

$g_0, g_1, \varphi_0, \varphi_1 \in C(R_+, C_{\{m_n\}}(A))\ (C(R_+, C_{(m_n)}(A))$,
$A^{-3}f(s), A^{-2}f(s) \in C(R_+, C_{\{m_n\}}(A))$,

$(A^{-3}f(s), A^{-2}f(s) \in (C(R_+, C_{(m_k)}(A))$ olarsa, onda $\exists\ C > 0, \rho = \rho(t) > 0$ ($\forall \rho > 0$ üçün, $\exists C > 0)$) ədədləri var ki, $\forall t \geq 0$ üçün aşağıdakı bərabərsizlik doğrudur:

$$\left\| u(t) - u_n(t) \right\| \leq C\rho^n \frac{m_n}{n!}(2 + 3t + \alpha t + t^2),$$
$$\rho = \alpha t. \qquad (13)$$

Teoremi isbat etmək üçün (13) bərabərsizliyinin sol tərəfindəki ifadədə $u(t)$ və $u_n(t)$ vektor–funksiyalarının ifadələrini yazıb (8)-(12) bərabərsizliklərini tətbiq etmək kifayətdir.

Bu teoremdən istifadə edərək başlanğıc verilənin xarakterindən asılı olar $n \to \infty$ olduqda $u_n(t)$ ardıcıllığının $u(t)$ həllinə yığılma sürətini təyin etmək olar ($g_0 = g_1 = 0$ götürəcəyik)

1. Tutaq ki, $\varphi_0, \varphi_1 \in C_{\{1\}}(A)$.Yəni, φ_0 və φ_1 A operatorunun eksponensial tip vektorları çoxluğuna daxildir. Onda $m_n = 1$ ($n = 1,2,3,...$) olduğu üçün (8) bərabərsizliyindən görunur ki, t-nin hər bir qiymətində yığılms sürəti $C(t)\dfrac{\rho^n}{n!}$ kimidir.

2. Tutaq ki, $\varphi_0, \varphi_1 \in C_{(n!)}(A)$. Yəni başlanğıc verilənlər A operatorunun tam vektorları çoxluğuna daxildir. Onda, $m_n = n!$ oldugu üçün t-nin hər bir qiymətində α -nı elə seçmək olar ki, $\rho = \alpha t < 1$ şərtini ödəsin. Onda yığılma sürəti $C(t)\rho^n$ olar.

3. Tutaq ki, $\varphi_0, \varphi_1 \in C_{(n^\beta)}(A)$. Onda (13) bərabərsizliyindən görünür ki, yığılma sürəti $C(t)\rho^n (n!)^{\beta-1}$ ($0 < \beta < 1$) kimi olur.

ƏDƏBİYYAT

1. Дж. Голдстейн. Полугруппы линейных операторов и их приложения. Киев, "Выща школа", 1989.
2. Горбачук В.И, Горбачук М.Л. Граничные задачи для дифференциально-операторных уравнений. Киев ."Наукова думка" , 1984.
3. Хилле Э, Филлипс Р. Функциональный анализ и полугруппы. Из-во ИЛ, Москва, 1963.