

DEFORMASIYANIN TƏSİR FUNKSIYASINA GÖRƏ RELAKSASIYA SPEKTRİNİN TƏYİNİ

N.F. ƏHMƏDOV, N.Ə. HƏNİFƏYEVƏ, S.X.SADIXOVA, F.A. ƏHMƏDOV, L.P. ƏLİYEV

Bakı Dövlət Universiteti

Bakı / AZƏRBAYCAN

farax1996@mail.ru

XÜLASƏ

Relaksasiya müddətlərinin spektri tərs məsələni həll etməyə imkan verir. Gərginliyin relaksasiyası məlum olduqda, deformasiyanın relaksasiyasını onları ifadə edən təsvir funksiyaları arasındakı münasibətdən tapmaq olar. Bunun üçün Laplas çevrilməsindən istifadə edilir. Koşi teoreminə görə çıxıqları hesablamaqla məlum təsvir funksiyasından gərginliyin relaksasiyasının təsir funksiyası tapılmışdır.

Açar sözlər: təsir funksiyası, relaksasiya müddətləri spektri, Laplas çevirmələri

THE DETERMINATION OF THE RELAXATIONS SPECTRE BY FUNCTION OF DEFORMATIONS IN FLUENCE

ABSTRACT

The spectre of the relaxations time allows possibility to solve the stubborn question. With known function of relaxation the function of relaxation's deformation was determines with relation between description functions. It is used with Laplas turns. With known description function by Koshy's theoreme the dislocations was calculated and the original of function was determined.

Key words: influence function, relaxation's times spectres, Laplas turns

Məlumdur ki, kiçik molekullu birləşmələr yalnız bir növ quruluş elementlərindən təşkil olunmuşdursa, onlar bir relaksasiya müddəti ilə xarakterizə olunurlar. Xətti amorf polimerdə isə eyni kinetik vahidlərin yenidən qruplaşması ilə gedən relaksasiya prosesi çox sayda relaksasiya müddətlərinə malik olur. Seqmentlərin və makromolekulların mütəhərrikiyi ilə təyin olunan hərəkətlər zamanı müxtəlif növdə qarşılıqlı təsirlər yaranır. Hətta qarşılıqlı təsirin təbiəti eyni olduqda belə orada iştirak edən kinetik vahidlərin müxtəlif sayda olmasından asılı olaraq polimerlərdə relaksasiya prosesi relaksasiya müddətləri spektri ilə xarakterizə olunur [1]. Bu işdə kinetik vahidləri arasında Bukinhem potensialına uy-

ğun [2] qarşılıqlı təsir olan halda xətti amorf polimerlərin relaksasiya müddətlərinin spektral sıxlığı hesablanmış və onun sərhədləri müəyyənləşdirilmişdir.

Göstərilən potensial funksiya əsasında kinetik vahidlərin hərəkət tənliyi qurulmuş, alınan qeyri-xətti diferensial tənlik ardıcıl yaxınlaşma üsulu ilə həll edilmişdir [3]. Prosesin anizoxron olmasını nəzərə alaraq relaksasiya modulunun tərs qiymətlərini ifadə edən funksiya tapılmışdır.

Məlumdur ki, cəmin təsviri ayrı-ayrı hədlərin təsvirlərinin cəminə bərabərdir. Onu nəzərə alsaq $J(t)$ funksiyasının təsvirləri aşağıdakı inteqrallarla göstərilə bilər.

$$J_1^*(p) = -\int_0^{\infty} \gamma A e^{-(p+\gamma)t} \cos(\omega t + \varphi) dt$$

$$J_2^*(p) = -\int_0^{\infty} \omega A e^{-(p+\gamma)t} \sin(\omega t + \varphi) dt$$

$$J_3^*(p) = -\int_0^{\infty} \gamma A^2 e^{-(p+2\gamma)t} dt$$

$$J_4^*(p) = -\int_0^{\infty} \frac{\gamma}{3} \frac{A^2 e^{-(2\gamma+p)t}}{\sqrt{1 + (\frac{4\gamma}{3\omega})^2}} \cos 2(\omega t + \varphi) dt$$

$$J_5^*(p) = -\int_0^{\infty} \frac{\omega}{3} \frac{A^2 e^{-(2\gamma+p)t}}{\sqrt{1 + (\frac{4\gamma}{3\omega})^2}} \sin 2(\omega t + \varphi) dt$$

Burada

$$J_1^*(p) + J_2^*(p) + J_3^*(p) + J_4^*(p) + J_5^*(p) = J^*(p)$$

şəklindədir. İnteqrallamadan sonra göstərilən təsvirlər üçün aşağıdakı ifadələr alınır.

$$J_1^* = \frac{\gamma A (p + \gamma)}{(p + \gamma)^2 + \omega^2}$$

$$J_2^* = \frac{\omega^2 A}{(p + \gamma)^2 + \omega^2}$$

$$J_3^* = \frac{\gamma A^2}{p + 2\gamma}$$

$$J_4^* = \frac{\gamma (p + 2\gamma) A^2}{3 \sqrt{1 + (\frac{4\gamma}{3\omega})^2}} = \frac{(p + 2\gamma)}{(p + 2\gamma)^2 + 4\omega^2}$$

$$J_5^* = \frac{\omega^2 A^2}{3 \sqrt{1 + (\frac{4\gamma}{3\omega})^2}} = \frac{2\omega}{(p + 2\gamma)^2 + 4\omega^2}$$

Əvvəlcə deformasiyanın relaksasiyasının sıfırıncı yaxınlaşmasında gərginliyin relaksasiya funksiyasını tapaq. Bunun üçün $J_1^*(\lambda)$, $J_2^*(\lambda)$ funksiyalarını

$$L^*(p) = \frac{E_\infty J^*(p)}{\frac{1}{E_\infty} + J^*(p)}$$

yazsaq

$$L_{1,2}^*(p) = \frac{E_\infty [\gamma A (p + \gamma) + \omega^2 A]}{E_\infty [\gamma A (p + \gamma) + \omega^2 A] + (p + \gamma)^2 \omega^2}$$

alınar. Burada E_∞ və A ani elastiklik moduluna və amplituda uyğun ölçüsüz gətirilmiş kəmiyyətlərdir. Göründüyü kimi gərginliyin relaksasiya funksiyasının təsviri kifayət qədər mürəkkəbdir. Ona görə də bu funksiyanın orijinalını tapmaq üçün Koşinin çıxıqlar haqqında teoremindən istifadə edək [4].

Bu teoremə əsasən $\frac{f_1(p)}{f_2(p)}$ funksiyasının p_0 nöqtəsində çıxığı $\frac{f_1(p_0)}{f_2'(p_0)}$ funksiyasına

bərabərdir [4]. $L_{1,2}^*$ təsvir funksiyasının məxrəcindəki $f_2(p)$ funksiyasının sadə sıfırlarını tapsaq buradan

$$P_{0i} = -\frac{1}{2} [\lambda(2 + E_\infty A) \pm \sqrt{E_\infty^2 A^2 \gamma^2 - 4E_\infty A \omega^2 - 4\omega^2}]$$

alınır. Aşağıdakı xüsusi hallara baxaq.

1) Yuxarıdakı ifadədə kök sıfıra bərabərdir,

$$E_\infty^2 A^2 \gamma^2 - 4E_\infty A \omega^2 - 4\omega^2 = 0$$

bu şərtdən $\omega = \frac{E_\infty A \gamma}{2\sqrt{1 + E_\infty A}}$ alınır.

Qeyd edildi ki, E_∞ və A gətirilmiş elastiklik modulu və amplitudlardır. Ona görə də ω və γ eyni vahidlərə malikdirlər. Burada da müxtəlif hallar ola bilər.

a) $\gamma < \omega$ onda $\frac{E_\infty A}{2\sqrt{1 + E_\infty A}} > 1$ və ya

$E_\infty A > 2(1 \pm \sqrt{2}) \Rightarrow E_\infty A > -0,8$ fiziki məna etibarını ilə hərəkət edərsə modul, amplitud mahiyyətə mənfi ola bilməz. Ona görə də alınan nəticəni $E_\infty A > 0$ kimi qəbul etmək lazımdır. Bu isə o deməkdir ki, $E_\infty A > 2(1 + \sqrt{2})$ yazılır.

b) $\gamma \approx \omega$ başqa sözlə $\gamma \approx \omega \Rightarrow 2(1 + \sqrt{2})$ a bəndinə görə baxılan hasilin mənfi qiyməti ola bilməz. Ona görə də qeyd edilmişdir ki, $E_\infty A \approx 4,8$ -dir.

c) $\gamma > \omega$ və ya $\frac{E_\infty A}{2\sqrt{1 + E_\infty A}} < 1$ yəni $E_\infty A < 2(1 + \sqrt{2})$ -dir. $E_\infty > 0$, $A > 0$ olduğundan $0 < E_\infty A < 2(1 + \sqrt{2})$ alınır.

Beləliklə $f_2(p) = 0$ şərtindən

$$P_0 = -\frac{1}{2}\gamma(2 + E_\infty A)$$

alınır. Onun törəməsi isə

$$f_2'(p) = \gamma E_\infty A + 2(p + \gamma)$$

yazılır.

Yuxarıda göstərilənləri nəzərə alsaq axtarılan funksiyanın orijinalını aşağıdakı kimi yazıla bilər [5]:

$$L_{12}(t) = \frac{1}{2\pi i} \int e^{pt} \frac{E_\infty^2 [\gamma A(p + \gamma) + \omega^2 A]}{E_\infty [\gamma A(p + \gamma) + \omega^2 A] + (p + \gamma)^2 + \omega^2} dp$$

Buradan isə

$$\begin{aligned} \Sigma_{P_{0i}} &= \frac{f_1(P_{0i})}{f_2(P_{0i})} = \frac{E_\infty^2 [\gamma A(P_0 + \gamma) + \omega^2 A]}{E_\infty \gamma A + (P_0 + \gamma) \cdot 2} = \\ &= -\frac{A(\omega^2 - \frac{1}{2}\gamma^2 A E_\infty^3)}{\gamma(2 + E_\infty A)(1 + \frac{1}{2}\gamma A E_\infty)} \end{aligned}$$

hesablanmış çıxığı inteqralda yerinə yazıb hesablasaq orijinal funksiya üçün

Belə olduqda təsir funksiyası aşağıdakı şəkli alır:

$$L_{12}(t) \Big|_{P_{0i}} = \pm \frac{E_\infty^2 A}{2} \left[\gamma \pm i \frac{\omega^2 + \frac{1}{2}\gamma^2 E_\infty A}{\omega(1 - \sqrt{E_\infty A})} \right] e^{-\frac{t}{2}[\gamma(2 + E_\infty A) \pm i 2\omega(1 - \sqrt{E_\infty A})]}$$

Başlanğıc amplitudun xəyali hissəsi udma prosesi ilə əlaqədardır. Baxılan məsələdə relaksasiya prosesləri öyrənilməsi üçün təsir funksiyasının həqiqi hissəsinə baxacağıq.

$$L_{12}(t) \Big|_{P_{0i}} = -\frac{A(\omega^2 - \frac{1}{2}\gamma^2 A E_\infty^2)}{\gamma(2 + E_\infty A)(1 + \frac{1}{2}\gamma A E_\infty)} e^{-\frac{t}{2}\gamma(2 + E_\infty A)}$$

alırıq.

Bu ifadə göstərir ki, əgər yuxarıda baxılan ifadənin bir kökü olsa idi gərginliyin relaksasiyası

$$\tau = \frac{2}{\gamma(2 + E_\infty A)}$$

buna bərabər relaksasiya müddəti ilə baş verir və eksponensial qanunla azalır. Qalan hallarda isə belə

$$a) \tau < \frac{1}{3,4\gamma}, \quad b) \tau \cong \frac{1}{3,4\gamma}, \quad c) \frac{1}{3,4\gamma} < \tau < \frac{1}{\gamma}$$

olur.

2) Tutaq ki, p -nin kökaltı ifadəsi kompleksdir, onu

$$i^2(a - b)^2 = i^2 4\omega^2(1 - \sqrt{E_\infty A})$$

şəklində yazmaq. Bu o vaxt ola bilər ki, $\frac{\omega}{\gamma} = (\frac{E_\infty A}{4})^{3/4}$ olur. Onda P_{02} aşağıdakı

kimi göstərilə bilər

$$P_{02} = -\frac{1}{2}[\gamma(2 + E_\infty A) \pm i 2\omega(1 - \sqrt{E_\infty A})]$$

və çıxığı aşağıdakı şəkildə

$$\Sigma_{P_{02}} = \frac{f_2(P_{02})}{f_2'(P_{02})} = \pm \frac{E_\infty^2 A}{2} \left[\gamma \pm i \frac{\omega^2 + \frac{1}{2}\gamma^2 E_\infty A}{\omega(\sqrt{E_\infty A})} \right]$$

yazıla bilər.

Eksponensial funksiyanın xəyali hissəsi relaksasiya prosesinin rəqsi xarakterdə olduğunu göstərir. Onu nəzərə alsaq və funksiyanın amplitud hissəsini ayırsaq təsir funk-

siyası aşağıdakı şəkildə düşər.

$$L_{12}(t) \Big|_{p_{02}} = \pm \frac{E_{\infty} A}{2} \gamma e^{-\frac{t}{2}\gamma(2+E_{\infty}A)} \left[\cos \omega(1 - \sqrt{E_{\infty}A})t \pm i \sin \omega(1 - \sqrt{E_{\infty}A})t \right]$$

Burada da yalnız funksiyanın həqiqi hissəsinə nəzərə alacağıq. Onda verilmiş kök üçün gərginliyin relaksasiyasının təsir funksiyasını aşağıdakı kimi tapmış olarıq.

$$L_{12}(t) \Big|_{p_{02}} = \pm \frac{E_{\infty}^2 A \gamma}{2} e^{-\frac{t}{2}\gamma(2+E_{\infty}A)} \cos(1 - \sqrt{E_{\infty}A})\omega t$$

Bu ifadəni $J(t)$ funksiyasının uyğun hədləri

$$J_{12}(t) = -\gamma A e^{-\gamma t} \cos(\omega t + \varphi) - \omega A e^{-\gamma t} \sin(\omega t + \varphi)$$

ilə müqayisə edək. Bu ifadələrin ümumi cəhətləri onların periodik xarakterdə olması və deformasiyanın amplitudunun eksponensial xarakteridir.

Bu proseslər bir-birindən onun azalma sürətləri və (gecikmə və relaksasiya müddətləri bir-birindən fərqlənir yəni

$$\tau_{\text{gec}} \neq \tau_{\text{rel}}, \tau_{\text{gec}} = \frac{1}{\gamma}, \tau_{\text{rel}} = \frac{2}{\gamma(2 + E_{\infty}A)}$$

rəqslərin tezliyi ilə (deformasiyanın relaksasiyası ω , gərginliyin relaksasiya isə $(1 - \sqrt{E_{\infty}A}) \cdot \omega$ tezlikdə baş verir) fərqlənirlər. Fiziki baxımdan tezlik müsbət kəmiyyət

$$L(t) \Big|_{p_{03}} = \pm \frac{E_{\infty}^2 A}{2} \left[\gamma \pm i \frac{\omega}{\sqrt{1 + E_{\infty}A}} \right] e^{-\frac{t}{2}[\gamma(2+E_{\infty}A) \pm i2\omega\sqrt{1+E_{\infty}A}]}$$

və ya

$$L(t) \Big|_{p_{02}} = \pm \frac{E_{\infty}^2 A \gamma}{2} e^{-\frac{t}{2}\gamma(2+E_{\infty}A)} \cos \omega \sqrt{1 + E_{\infty}A} t$$

olur.

Buradan görünür ki, relaksasiya müddəti dəyişməz qalır, rəqslərin tezliyi isə

$$\frac{\sqrt{1 + E_{\infty}A}}{1 - \sqrt{E_{\infty}A}}$$

yət olduğundan $0 \leq \sqrt{E_{\infty}A} \leq 1$ şərt ödənməlidir. Aşağı sərhəddə uyğun qiymətlərdə rəqslər yaranmır, bu $\gamma \gg \omega$ -ya uyğun gəlir, yuxarı sərhəddə isə rəqslər ω tezliyi ilə baş verir. Bu «ideal» hala uyğundur, yəni həm deformasiyanın, həm də gərginliyin relaksasiyasının gedişi eyni kinetik vahidlərin hesabına baş verir.

Yuxarıdakı funksiyaların müqayisəsindən görünür ki, bu proseslərin başlıca fərqi relaksasiya funksiyasının kosinus qanununa tabe olması, deformasiyanın relaksasiya funksiyasının isə həm kosinus, həm də sinus qanunu ilə təyin olunmasıdır.

3) $\gamma \ll \omega$ halına baxaq.

Bu halda P_{0i} ifadəsindəki kökün altında $-4\omega^2(1 + E_{\infty}A)$ vuruğu qalacaqdır. Onda

$$p_{03} = -\frac{1}{2} \left[\gamma(2 + E_{\infty}A) \pm i2\omega\sqrt{1 + E_{\infty}A} \right]$$

olar. P_{03} kökü P_{02} kökündən xəyali vuruqla fərqlənir, yəni P_{03} kökündə $(1 - \sqrt{E_{\infty}A})$ əvəzinə $(1 + \sqrt{E_{\infty}A})$ durur. Bu halda təsir funksiyası aşağıdakı şəkildə düşür,

dəfə dəyişir.

Deformasiyanın və gərginliyin təsir funksiyalarından tapılmış gecikmə və relaksasiya müddətləri bir-birindən fərqlənir. Potensial funksiyanın tarazlığa uyğun maksimum qiyməti və ani elastiklik modulu nə qədər böyük olarsa bu fərqlənmə daha kəskin görünür. Aydınadır ki, hər iki prosesdə eyni kinetik vahidlər iştirak edir. Lakin onların oriyentasiyası və dezoryentasi-

yası müxtəlif müddətlərdə baş verir. Bu onunla izah olunur ki, düzlənməyə keçid ehtimalı, pozulmaya uyğun keçid ehtimalından fərqlənir. Düzlənməyə keçid ehtimalı kiçik olur və ona görə də gecikmə müddəti daha böyük olur.

ƏDƏBİYYAT

1. Готлиб Ю.Я., Тошевилов В.П.// Журнал Высокомолекулярные соединения. т.43, 2001, №5, с. 833-839.
2. Каплан И.Г. Введение в теорию межмолекулярных взаимодействий. М. Наука, 1982, 354 с.
3. Мигулин В.В., Медведев В.И., Мустель Е.Р., Парыгин В.Н. Основы теории колебаний М., 1978, 392 с.
4. Деч Л. Руководство по применению преобразований Лапласа. 1983, 312 с.
5. Бейтмен Г., Эрдейн А., Таблица интегральных преобразований т. 1, Преобразования Фурье, Лапласа, Меллина М.1969, 344 с.